BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

ОДНОМЕРНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

А.Г.ГЕЙДАРОВ
Бакинский Государственный Университет

В работе определяется самосопряженный оператор в пространстве $L_2(R)$, *соответствующий формальному дифференциальному оператору* $A=-\frac{d^2}{dx^2}+\alpha\delta(x)+\beta\delta'(x)$. *Находится явный вид резольвенты оператора* A.

Показано, что $\sigma_{ess}(A)=\sigma_{ac}(A)=[0,+\infty)$. *Найдены отрицательное собственное значение и соответствующая нормированная собственная функция.*

В данной работе предлагается новый подход для определения самосопряженного оператора в пространстве $L_2(R)$, соответствующий формальному дифференциальному оператору

$$A=-\frac{d^2}{dx^2}+\alpha\ \delta(x)+\beta\,\delta'(x). \tag{1}$$

Здесь $\delta(x)$–функция Дирака, $\delta'(x)$-ее производная, $\alpha,\beta\in R=(-\infty,+\infty)$. Этот подход основан на формулах для произведений $\delta(x)\cdot f(x)$ и $\delta'(x)\cdot f(x)$, где функция $f(x)$ и ее классическая производная имеют в точке $x=0$ разрывы первого рода.

Спектральная теория операторов вида (1) разрабатывается сравнительно давно, особенно после появления знаменитой работы [1], где впервые применялась строгая математическая теория, а именно теория самосопряженных расширений симметрических операторов. В монографии [2] излагается история этого вопроса и приводится обширная библиография. Из недавних работ отметим [3-6], где исследуются различные спектральные свойства точечных возмущений. Изучены также операторы Шредингера $-\Delta+q(x)$ в пространстве $L_2(R^n)$ с нефинитными обобщенными потенциалами из пространства Соболева $W_p^s(R^n)$ (см.напр. [7-9]).

Операторы вида (1) можно определить различными методами (см. напр. [2], [10]). Очевидно, что одно из корректных и естественных определений оператора (1) должно исходить из обычного определения линейного оператора в $L_2(R)$, без использования процедуры замыкания. Для этого, как обычно, надо задавать область определения $D(A)$ и действие оператора на функции $f \in D(A)$. При этом необходимо возникает задача определения произведения $\delta(x) \cdot f(x)$ и $\delta'(x) \cdot f(x)$. Важность проблемы определения произведений обобщенных функций для задач квантовой механики отмечается в работе [11].

Наш подход определения оператора (1) основан на следующих формулах умножения:

$$\delta(x) \cdot f(x) = \frac{f(+0)+f(-0)}{2}\delta(x), \tag{2}$$

$$\delta'(x) \cdot f(x) = -\frac{f'(+0)+f'(-0)}{2}\delta(x)+\frac{f(+0)+f(-0)}{2}\delta'(x). \tag{3}$$

Эти формулы обоснованы в работе [12]. Отметим, что формулы (2) и (3) позволяют рассмотреть одновременно $\delta(x)$ и $\delta'(x)$ взаимодействия, причем в одной и той же точке.

Теперь излагаем предлагаемый подход определения самосопряженного оператора, соответствующий оператору (1). Пусть $D(A)$–множество функций $f \in W_2^2(R \setminus \{0\})$, удовлетворяющих граничным условиям

$$(\beta-2)f(+0)+(\beta+2)f(-0)=0, \tag{4}$$

$$(\beta+2)f'(+0)+(\beta-2)f'(-0)=\alpha[f(+0)+f(-0)]\ . \tag{5}$$

Определим в $L_2(R)$ оператор A с плотной областью определения $D(A)$, полагая

$$Af = -\frac{d^2 f}{dx^2} + \alpha\, \delta(x)\cdot f + \beta\,\delta'(x)\cdot f, \tag{6}$$

где производная $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ понимается в смысле обобщенных функций, а произведения $\delta(x) \cdot f$ и $\delta'(x) \cdot f$ определяются формулами (2) и (3).

Используя граничные условия (4) и (5), легко проверить, что A - замкнутый симметрический оператор в пространстве $L_2(R)$.

В данной работе доказывается самосопряженность оператора A и находится явный вид резольвенты $R_z(A)$. Кроме того, исследуется структура спектра оператора A. Приводится также сравнение полученных результатов с ранее известными.

Теорема 1. Оператор A самосопряжен в пространстве $L_2(R)$. Резольвента $R_z(A)$ является интегральным оператором в $L_2(R)$ с ядром

$$G(x,y;z) = -\frac{1}{2i\sqrt{z}}e^{i\sqrt{z}|x-y|} -$$

$$-\frac{2\alpha - \beta^2 i\sqrt{z}(1 - sign\,x \cdot sign\,y) + 2\beta i\sqrt{z}(sign\,x + sign\,y)}{2i\sqrt{z}[(4+\beta^2)i\sqrt{z} - 2\alpha]}e^{i\sqrt{z}(|x|+|y|)}, \qquad (7)$$

причем

$$z \overline{\in} [0,+\infty) \cup \{-4\alpha^2(4+\beta^2)^{-2}\}, \quad \textit{если} \ -\infty < \alpha < 0,\ -\infty < \beta < +\infty;$$

$$z \overline{\in} [0,+\infty), \quad \textit{если} \ 0 \le \alpha < +\infty, \ -\infty < \beta < +\infty.$$

Здесь выбирается ветвь корня $\sqrt{z}$, положительная на положительной полуоси.

Доказательство. Покажем, что резольвентное множество замкнутого симметрического оператора A содержит хотя бы одно вещественное число. Тогда отсюда будет следовать самосопряженность оператора A ([13], следствие теоремы X.1).

Построим резольвенту оператора A. С этой целью решаем в пространстве $L_2(R)$ уравнение

$$Af + \lambda^2 f = g, \quad (g \in L_2(R),\ \lambda > 0).$$

В силу (2), (3) и (6) это уравнение можно записать в следующем виде

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + \alpha \cdot \frac{f(+0)+f(-0)}{2}\delta(x) - \beta\frac{f'(+0)+f'(-0)}{2}\delta(x) +$$

$$+\beta\frac{f(+0)+f(-0)}{2}\delta'(x) + \lambda^2 f = g.$$

Применяя к этому уравнению преобразование Фурье F и учитывая, что

$$F\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right] = \xi^2 F[f], \quad F[\delta(x)] = 1, \quad F[\delta'(x)] = -i\xi,$$

получаем

$$F[f]=\frac{f(+0)+f(-0)}{2}\cdot\frac{-\alpha}{\xi^2+\lambda^2}+\frac{f'(+0)+f'(-0)}{2}\cdot\frac{\beta}{\xi^2+\lambda^2}+$$

$$+\frac{f(+0)+f(-0)}{2}\cdot\frac{i\beta\xi}{\xi^2+\lambda^2}+\frac{1}{\xi^2+\lambda^2}F[g].$$

Теперь применяем к полученному уравнению обратное преобразование Фурье F^{-1} и используем известные формулы

$$F^{-1}\left[\frac{1}{\xi^2+\lambda^2}\right]=\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda|x|},\quad F^{-1}\left[\frac{\xi}{\xi^2+\lambda^2}\right]=-\frac{isign\,x}{2}e^{-\lambda|x|},$$

$$F^{-1}\left[\frac{1}{\xi^2+\lambda^2}F[g]\right]=F^{-1}\left[\frac{1}{\xi^2+\lambda^2}\right]*g.$$

Тогда

$$f(x)=-\frac{f(+0)+f(-0)}{4\lambda}\alpha e^{-\lambda|x|}+\frac{f'(+0)+f'(-0)}{4\lambda}\beta e^{-\lambda|x|}+$$
$$+\frac{f(+0)+f(-0)}{4}\beta\, sign\,x\, e^{-\lambda|x|}+\frac{1}{2\lambda}\int_R e^{-\lambda|x-y|}g(y)dy. \qquad (8)$$

Найдем величины $f(+0)+f(-0)$ и $f'(+0)+f'(-0)$. Перейдем в (8) к пределу при $x\to+0$. Тогда

$$f(+0)=\frac{f(+0)+f(-0)}{4}\left(\beta-\frac{\alpha}{\lambda}\right)+$$
$$+\frac{f'(+0)+f'(-0)}{4\lambda}\beta+\frac{1}{2\lambda}\int_R e^{-\lambda|y|}g(y)dy \qquad (9)$$

Далее вычисляем производную $f'(x)$ и в полученном равенстве переходим к пределу при $x\to+0$. Тогда имеем

$$f'(+0)=\frac{f(+0)+f(-0)}{4}(\alpha-\beta\lambda)-\frac{f'(+0)+f'(-0)}{4}\cdot\beta+$$
$$+\frac{1}{2}\int_R e^{-\lambda|y|}\,signy\cdot g(y)dy. \qquad (10)$$

Решая систему, составленную из уравнений (4), (5), (9) и (10) относительно $f(+0)$, $f(-0)$, $f'(+0)$ *и* $f'(-0)$, находим

$$f(+0)+f(-0)=\frac{2\beta}{2\alpha+(4+\beta^2)\lambda}\int_R e^{-\lambda|y|}signy\cdot g(y)dy+$$

$$+\frac{4}{2\alpha+\left(4+\beta^{2}\right)\lambda}\int_{R} e^{-\lambda|y|}\, g(y)dy,$$

$$f'(+0)+f'(-0)=\frac{2(\alpha+2\lambda)}{2\alpha+\left(4+\beta^{2}\right)\lambda}\int_{R} e^{-\lambda|y|}\, signy\cdot g(y)dy-$$

$$-\frac{2\beta\lambda}{2\alpha+\left(4+\beta^{2}\right)\lambda}\int_{R} e^{-\lambda|y|}\, g(y)dy.$$

Учитывая полученные выражения в (8), после несложных преобразований получаем

$$f(x)=\int_{R} G\left(x,y;-\lambda^{2}\right)g(y)dy, \tag{11}$$

где

$$G(x,y;-\lambda^{2})=\frac{1}{2\lambda}\, e^{-\lambda|x-y|}-$$
$$-\frac{2\alpha+\beta^{2}\lambda(1-signx\cdot sign\,y)-2\beta\lambda(signx+sign\,y)}{2\lambda\left[\ 2\alpha+\left(4+\beta^{2}\right)\lambda\ \right]}e^{-\lambda(|x|+|y|)}. \tag{12}$$

Из представления (12) непосредственно следует, что если $\lambda\in(0,+\infty)$ при $0\leq\alpha<+\infty$, $-\infty<\beta<+\infty$ и если $\lambda\in(0,+\infty)\setminus\{-2\alpha(4+\beta^{2})^{-1}\}$ при $-\infty<\alpha<0$, $-\infty<\beta<+\infty$, то интегральный оператор (11) ограничен в $L_2(R)$. Следовательно, обратный оператор $\left(A+\lambda^{2}E\right)^{-1}$ существует и ограничен в пространстве $L_2(R)$. Поэтому

$$\left(A+\lambda^{2}E\right)^{-1} g(x)=\int_{R} G\left(x,y;-\lambda^{2}\right)g(y)dy,\ \ g\in L_2(R),$$

и $-\lambda^{2}\in\rho(A)$, где $\rho(A)$–резольвентное множество оператора A. Таким образом, резольвентное множество $\rho(A)$ содержит вещественные числа, и, следовательно, оператор A самосопряжен в $L_2(R)$.

Продолжая аналитически $G\left(x,y;-\lambda^{2}\right)$ по λ на комплексную плоскость, получаем, что $R_z(A)$ является интегральным оператором, причем ядро $G(x,y;z)$ имеет представление (7). Заметим, что для получения представления (7) достаточно заменить в (12) λ на $-i\sqrt{z}$, где $\sqrt{z}$ –ветвь корня, равная $i\sqrt{z}$ при $z=-\lambda<0$, т.е. положительная на положительной полуоси.

Из представления (7) непосредственно следует, что

$$\rho(A)=C\setminus\left([0,+\infty)\cup\left\{-\left(\frac{2\alpha}{4+\beta^2}\right)^2\right\}\right),$$

если $-\infty<\alpha<0,\ -\infty<\beta<+\infty;$

$$\rho(A)=C\setminus[0,+\infty),$$

если $0\le\alpha<+\infty,\ -\infty<\beta<+\infty.$

Теорема 1 доказана.

Структура спектра оператора A описывается следующей теоремой.

Теорема 2. Существенный спектр оператора A совпадает с абсолютно непрерывной частью спектра, причем

$$\sigma_{ess}(A)=\sigma_{ac}(A)=[0,+\infty)\ . \tag{13}$$

Если $-\infty<\alpha<0,\ -\infty<\beta<+\infty,$ то оператор A имеет только одно отрицательное простое собственное значение $\lambda_0=-\left(\frac{2\alpha}{4+\beta^2}\right)^2$. Соответствующая нормированная собственная функция имеет вид

$$f(x)=\frac{\sqrt{2|\alpha|}}{4+\beta^2}(2+\beta signx)\ e^{\frac{2\alpha}{4+\beta^2}|x|}. \tag{14}$$

В случае $0\le\alpha<+\infty,\ -\infty<\beta<+\infty$ оператор A собственных значений не имеет.

Доказательство. Пусть A_0–минимальный оператор в $L_2(R)$, порожденный выражением $-\frac{d^2f}{dx^2}$. Известно, что A_0-неотрицательный самосопряженный оператор и резольвента $R_z(A_0)$, $z\overline{\in}[0,+\infty)$ является интегральным оператором в $L_2(R)$ с ядром

$$G_0(x,y;z)=-\frac{1}{2i\sqrt{z}}\ e^{i\sqrt{z}|x-y|}.$$

Кроме того,

$$\sigma(A_0)=\sigma_{ess}(A_0)=\sigma_{ac}(A_0)=[0,+\infty).$$

Обозначим

$$B=(A+\lambda_0^2E)^{-1}-(A_0+\lambda_0^2E)^{-1},\ \lambda_0>0,\ -\lambda_0^2\in\rho(A)\cap\rho(A_0).$$

Согласно (12) оператор B является оператором Гильберта-Шмидта, и следовательно компактен. В силу теоремы Вейля ([14], теорема XIII.14) существенные спектры операторов A и A_0 совпадают:

$$\sigma_{ess}(A)=\sigma_{ess}(A_0)=[0,+\infty). \tag{15}$$

Из представления (12) следует, что B–конечномерный оператор. Согласно известной теореме ([15], гл.X., теорема 4.2) абсолютно непрерывные части операторов A и A_0 унитарно эквивалентны. В частности, абсолютно непрерывные части спектров A и A_0 совпадают

$$\sigma_{ac}(A)=\sigma_{ac}(A_0)=[0,+\infty).$$

Отсюда и из (15) следует (13).

Решая уравнение $Af=\lambda f$ находим, что число $\lambda_0=-\left(\frac{2\alpha}{4+\beta^2}\right)^2$ $(-\infty<\alpha<0$, $-\infty<\beta<+\infty)$–отрицательное простое собственное значение оператора A и нормированная собственная функция имеет вид (14). Далее показывается, что уравнение $Af=\lambda f$ при $0\le\alpha<+\infty$, $-\infty<\beta<+\infty$ не имеет нетривиальных решений из $L_2(R)$, т.е. в этом случае оператор A собственных значений не имеет. Теорема 2 доказана.

Приведем сравнение полученных результатов с ранее известными. Если $\alpha=0$, $\beta=0$, то A совпадает с оператором $-\frac{d^2}{dx^2}$, спектральные свойства которого хорошо известны. В случае $\beta=0$ и $\alpha\neq 0$ получается одномерный оператор Шредингера с δ–взаимодействием и при этом полученные нами результаты совпадают с ранее известными ([2], гл.I.3).

В случае $\alpha=0$ и $\beta\neq 0$ рассмотренный нами оператор A отличается от так называемого оператора Шредингера с δ'–взаимодействием E_β ([2], гл.I.4):

$$E_\beta=-\frac{d^2}{dx^2},$$

$$D(E_\beta)=\{f\in W_2^2(R\setminus\{0\}):f'(+0)=f'(-0),f(+0)-f(-0)=\beta f'(0)\}.$$

Здесь $\frac{d^2f}{dx^2}$–обобщенная производная второго порядка в $R\setminus\{0\}$.

Однако, как отмечается в [16] самосопряженный оператор E_β не описывает δ'–взаимодействие в обычном смысле. В действительности, δ'-взаимодействие одномерного оператора Шредингера должно быть связано именно с оператором $-\frac{d^2}{dx^2}+\beta\delta'(x)$. Заметим, что действие оператора E_β можно записать в следующем виде

$$E_\beta f = -\frac{d^2 f}{dx^2} + \beta f'(0)\delta'(x), \ f \in D(E_\beta),$$

где $\frac{d^2 f}{dx^2}$–обобщенная производная второго порядка функции f в R. Отсюда следует, что в действительности E_β соответствует оператору $-\frac{d^2}{dx^2} + \beta Q$, где Q-оператор, действующий по правилу $Qf = f'(0)\delta'(x)$ с областью определения $D(Q) = D(E_\beta)$. Его можно понимать как оператор, действующий из $L_2(R)$ в $W_2^{-\frac{3}{2}-\varepsilon}(R)$ $(\varepsilon > 0)$.

Согласно формуле (3), если $f = D(E_\beta)$, то

$$\delta'(x) \cdot f(x) = -f'(0)\delta(x) + \frac{f(+0) + f(-0)}{2}\delta'(x).$$

Очевидно, что обобщенные функции $f'(0)\delta'(x)$ и $\delta'(x) \cdot f(x)$ не равны в R, и следовательно, E_β не соответствует оператору $-\frac{d^2}{dx^2} + \beta\delta'(x)$.

Учитывая вышеизложенные, можно сказать, что определенный нами самосопряженный оператор A является одним из разумно допустимых реализаций формального оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta(x) + \beta\delta'(x)$ в пространстве $L_2(R)$.

Результаты этой работы были анонсированы автором в [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечания об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом. Докл. АН СССР, 1961, т.137, № 7, с.1011-1014.
2. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.-568с.
3. Михайлец В.А. Об операторе Шредингера с точечными δ' -взаимодействиями. ДАН, 1996, т.348, № 6, с.727-730.
4. Кадиев Р.И. (младший). О спектре одного класса операторов Шредингера с конечным числом обобщенных функций. Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 1998, № 7(434), с.26-31.
5. Exner P., Neidhardt H., Zagrebnov V.A. Potential approximations to δ' : An inverse Klauder phenomenon with norm-resolvent convergence. Commun. Math.

Phys.2001, v.224, № 3, p.593-612.
6. Нижник Л.П. Оператор Шредингера с δ' -взаимодействием. Функц. анализ и его прил., 2003, т.37, № 1, с.85-88.
7. Herczynski J. Schrödinder operators with distributional potentials. Journ. Oper. Theory.1989, v.21, № 2, p.273-295.
8. Нейман-заде М.И., Шкаликов А.А. Операторы Шредингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов. Матем.заметки. 1999.-т.66, № 5, с.723-733.
9. Бак Дж.-Г., Шкаликов А.А. Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шредингера с потенциалами–распределениями. Матем.заметки. 2002, т.71, № 5, с.643-651.
10. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями. Труды Моск. матем. об-ва. 2003, т.64, с.159-212.
11. Егоров Ю.В. К теории обобщенных функций. Успехи матем.наук. 1990, т.45, вып.5, с.3-40.
12. Гейдаров А.Г. О произведениях обобщенных функций. Вестн.Бакинского ун-та. Сер. физ.-мат.наук. 2004, № 2, с.39-46.
13. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т.2, М.: Мир, 1978. -395 с.
14. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т.4, М.: Мир, 1982, -428с.
15. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.-740с.
16. Śeba P. Some remarks on the δ'–interaction in one dimension. Reports Math.Physics. 1986, v.24, № 1, p.111-120.
17. Гейдаров А.Г. Об одном классе одномерных операторов Шредингера с точечными взаимодействиями. Матер.научн.конференции «Современные проблемы прикладной математики», Баку, 2002, с.76-78.

NÖQTƏVİ HƏYƏCANLAŞMIŞ BİRÖLÇÜLÜ ŞREDİNGER OPERATORU

A.H.HEYDƏROV

ANNOTASİYA

Məqalədə $L_2(R)$ fəzasında $A=-\frac{d^2}{dx^2}+\alpha\delta(x)+\beta\delta'(x)$ formal diferensial operatoruna uyğun olan öz özünə qoşma operator təyin edilir. A operatorunun rezolventinin göstərilişi tapılır. Göstərilir ki, $\sigma_{ess}(A)=\sigma_{ess}(A_0)=[0,+\infty)$. A operatorunun mənfi məxsusi qiyməti və uyğun normallaşmış məxsusi funksiyası tapılır.

ONE-DIMENSIONAL SCHRÖDINGER OPERATOR WITH POINT PERTURBATIONS

A.H.HEYDAROV

ABSTRACT

In this work the self-adjoint operator in the space $L_2(R)$, corresponding to the formal differential operator $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta(x) + \beta\delta'(x)$ is defined. The form of the resolvent of the operator A is found. The equality $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A_0) = [0,+\infty)$ is shown. Negative eigenvalue and the corresponding normalized eigenfunction of the operator A are found.